Nombres sectionnables

Partie A

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable unitaire* s'il est supérieur ou égal à 3 et s'il peut s'écrire sous la forme : $1+2+3+\cdots+p$ où p est un entier supérieur ou égal à 2.
Par exemple, 3 et 10 sont des nombres sectionnables unitaires car $3 = 1 + 2$ et $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. a. Montrer que 21 et 136 sont sectionnables unitaires.
b. Est-ce que 1850 est sectionnable unitaire ?

2. Soit a un entier supérieur ou égal à 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que a soit un entier sectionnable unitaire.

Partie B

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable* s'il peut s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

Par exemple, 24 et 25 sont sectionnables car $24 = 7 + 8 + 9$ et $25 = 12 + 13$.
En revanche, 4 n'est pas sectionnable car $1+2<4<1+2+3$ et $2+3>4$.

1. Justifier que 9 et 15 sont sectionnables mais que 16 ne l'est pas.

2. Démontrer que si un entier est impair et supérieur ou égal à 3, alors il est sectionnable.

3. Soit k et q des entiers naturels avec $k \geqslant 2$. On pose $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$.
Montrer que $2S = k(k+1+2q)$.

4. Montrer qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.

5. On s'intéresse aux entiers strictement positifs pairs qui ne sont pas des puissances de 2.
Soit n un tel entier. On admet qu'il existe un unique couple d'entiers (r,m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n=2^r\times m$.

a. Déterminer r et m quand $n=56$. En déduire que 56 est sectionnable et l'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

b. Montrer que 44 est sectionnable.

c. Montrer que tout nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2 est sectionnable.

6. Déduire de ce qui précède l'ensemble des nombres sectionnables.

Partie C

On dit qu'un nombre entier est *uniquement sectionnable* lorsqu'il peut s'écrire de façon unique comme somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.
1. Montrer que le nombre 13 est uniquement sectionnable. Le nombre 25 est-il uniquement sectionnable ?
2. a. Soit un entier n qui est la somme de k entiers strictement positifs consécutifs, avec $k \geqslant 3$.
On peut donc écrire n sous la forme $n=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$, avec q entier positif ou nul.
Montrer que n n'est pas un nombre premier.

b. En déduire que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est uniquement sectionnable.